Olympiades – Sélection d'exercices tirés de sujets différents
(un sujet complet est composé de 2 exercices 'nationaux' et deux exercices 'académiques')

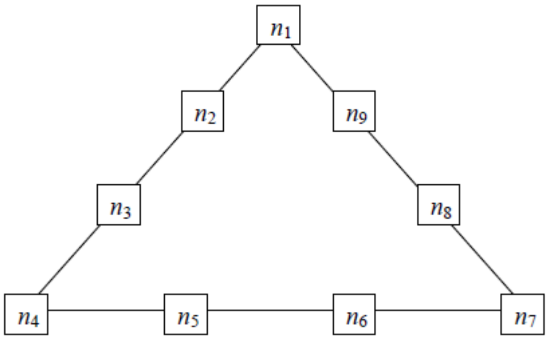
Ex 1 (National, 2009) :

Partie A : Questions préliminaires :

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.
1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2- Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

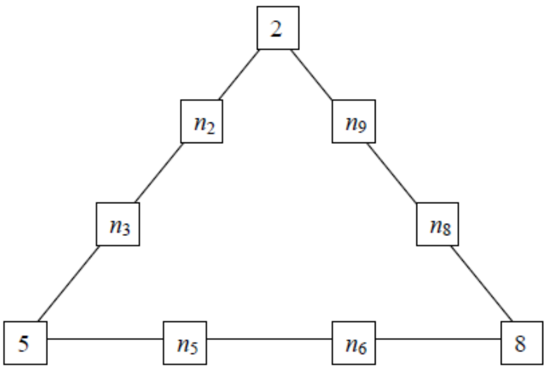
On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S, on dit que le triangle est S-magique.
(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \ = \ n_4 + n_5 + n_6 + n_7 \ = \ n_7 + n_8 + n_9 + n_1 \ = \ S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2- On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.

a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$
c. Donner la liste des couples $(S\ ,\ T)$ ainsi envisageables.

3- Proposer un triangle 17-magique.

4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

5- **a.** Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
b. Proposer un triangle 19-magique.

6- Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.

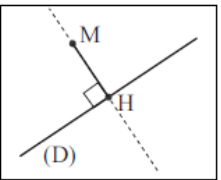
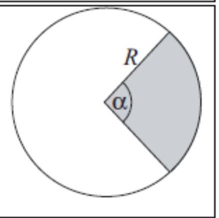
7- Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

Ex 2 (National, 2012) :

Plus proche, plus loin

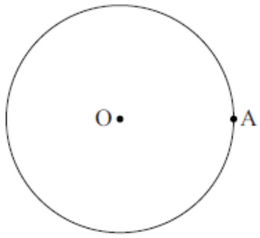
Énoncé

Rappels

On appelle ***distance entre un point M et une droite (D)*** la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.	
Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors l'aire de la portion de disque grisée vaut $\dfrac{\pi\alpha R^2}{360}$. Dans la partie II de l'exercice, on considèrera la distance d'un point M à un segment [BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).	

Partie 1

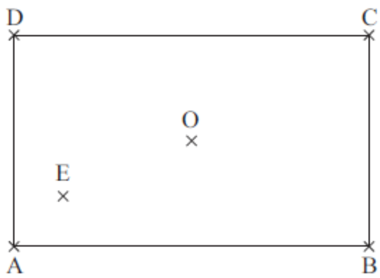
Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.
2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.
3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.
   Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie 2

Soit ABCD un rectangle de longueur $AB = 20$ cm et de largeur $BC = 12$ cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?
2. a. Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].
   b. Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].
   c. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?
3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?
4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?
5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

Ex 3 (Limoges, 2013) :

Un tableau est constitué de boutons. Sur chacun des boutons est affiché un chiffre pouvant prendre la valeur 0 ou 1. En appuyant sur un bouton, on change la valeur de ce bouton, ainsi que celle des boutons voisins horizontaux et verticaux immédiats (si ceux-ci existent) : un chiffre 1 est remplacé par 0 et vice-versa.

But du jeu : à partir d'une configuration initiale donnée, il s'agit, en appuyant sur les boutons, d'obtenir une grille constituée uniquement de zéros.

Pour suivre la séquence donnant la solution éventuelle, on repère les boutons du tableau par des lettres.

Ainsi, un tableau de taille 4×4 sera repéré : $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{pmatrix}$.

Exemple : on donne comme tableau initial le tableau $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En appuyant successivement sur les boutons G, I et A, on résout le problème, comme le montre la séquence ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bouton } \mathbf{G}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \mathbf{1} & 1 & \boxed{0} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bouton } \mathbf{I}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bouton } \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La suite de lettres associée à la solution est : **GIA**.

1. *Grille* 2×2

   Les boutons sont repérés ainsi : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

   (a) À partir de la configuration $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, proposer une séquence donnant une solution au jeu.

   (b) Montrer qu'à partir de n'importe quelle configuration initiale, on parvient toujours à une solution au jeu.

2. *Grille* 3×3

Les boutons sont repérés ainsi : $\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \mathrm{G} & \mathrm{H} & \mathrm{I} \end{pmatrix}$.

(a) Recopier et compléter la séquence suivante qui mène à une solution du jeu :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bouton F}} \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bouton} \dots} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bouton D}} \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bouton} \dots} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) On considère l'algorithme suivant :

```
Parcourir les boutons D à I successivement
Pour chaque bouton parcouru

    si  le chiffre situé immédiatement au dessus est égal à 1 alors
     | Appuyer sur ce bouton
    sinon
     | Ne pas appuyer sur ce bouton

Fin parcours
```

Montrer qu'en appliquant l'algorithme à la configuration initiale : $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on aboutit à la configuration finale suivante : $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donner la suite de lettres associée à cette séquence.

(c) Donner une séquence de lettres permettant de passer du tableau final T au tableau initial S.

(d) On étudie la configuration finale T obtenue à la question (b).

On applique à cette configuration une « correction d'algorithme » en appuyant tout d'abord sur le bouton A, puis on applique au tableau obtenu l'algorithme précédent.

Montrer qu'avec cette correction d'algorithme on parvient à résoudre le jeu. En déduire la suite de lettres associée donnant la solution du jeu à partir de la configuration initiale S.

(e) Quelles sont toutes les configurations finales possibles que l'on peut obtenir en appliquant l'algorithme à une configuration initiale quelconque ?

(f) À partir d'une grille vide, on appuie sur la touche A, puis sur la touche B, et on applique l'algorithme. Quelle configuration finale (parmi celles trouvées à la question (e)) obtient-on ? En déduire une « correction d'algorithme » permettant de résoudre cette configuration finale.

(g) En s'inspirant de la question précédente, résoudre toutes les configurations finales trouvées à la question (e).